SOLVTIO PROBLEMATIS
SVMME
MEMORABILIS ATQVE GENERALIS
AD
DIVISIONEM POLYGONORVM PER DIAGONALES SPECTANTIS

DISSERTATIO MATHEMATICA

QUAM
PRO LOCO
IN FACVLTATE PHILOSOPHICA ERLANGENSI
RITE OBTINENDO
DIE XII. MARTII MDCCCXIV

PUPLICE DEFENDET

M. HENRICVS AVGVSTVS ROTHE
Math. P. P. O. Soc. Reg. Gotting. Litt. Comerc. Coniunct.

ASSVMTO SOCIO

M. MARTINO OHM
Gen. Soc. Camer. Oec. Erl. Sod.

ERLANGAE
MDCCCXIV.

Ein Geschenk des Verfassers

Solutio problematis summe memorabilis atque generalis ad diuisionem polygonorum per diagonales spectantis.

§. I.

Praemonenda.

1. Si polygonon P a) per diagonales in plura alia, quae *partes* vocentur, discerpitur; ad quamcunque partem saltem vna pertinet diagonalis.

a) Quae in hac tractatione de polygonis acta sunt, solummodo de eius modi polygonis valent, cuius omnes anguli concavi (*auswärtsgehende, angles saillants*) vel duobus rectis minores sunt, atque, commode saltem, ad polygona cum angulis conuexis (*einwärtsgehende, angles rentrants*) qui duobus rectis maiores sunt, non possunt extendi.

2. Duabus partibus vel nulla vel vna communis est diagonalis.

3. Quoduis polygoni P latus ad *vnam* pertinet partem, quaeuis diagonalis autem *duabus* partibus est communis.

4. Si itaque N multitudo laterum polygoni P, D multitudo diagonalium, atque S summa laterum omnium partium est; erit $N + 2D = S$, $N = S - 2D$.

5. Multitudo partium vnitate maior est multitudine diagonalium.

6. Si itaque vt antea D multitudo diagonalium est; erit (5.) $D + 1$ multitudo partium, ergo $S > 3D + 2$, atque (4.) $N = S - 2D > D + 2$, vel $N - 2 > D$.

7. Si litterae k, l, m &c. numeros integros non negatiuos, litterae *a*, *b*, *c* &c. autem numeros integros positiuos designant, atque polygonon P diagonalibus in k $(2 + a)$ gona, l $(2 + b)$ gona, m $(2 + c)$ gona &c. resoluendum est; erit $S = 2(k + l + m + \&c.) + ka + lb + mc + \&c.$ porro (5.)

D = - 1 + k + l + m + &c. ergo (4.)
N = 2 + ka + lb + mc + &c.

8. Vice versa litteris k, l, m &c. a, b, c &c. idem ac in (7.) designantibus; quodcunque polygonon 2 + ka + lb + mc + &c. laterum, per - 1 + k + l + m + &c. diagonales in k (2 + a) gona, l (2 + b) gona, m (2 + c) gona &c. potest discerpi.

§. II.

Problema maxime generale, quod hic soluere nobis proposuimus, est:

Litteris k, l, m *etc. numeros integros non negatiuos, litteris a, b, c etc. autem numeros integros positiuos* d i u e r s o s *designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon* 2 + ka + lb + mc + &c. *laterum, per* - 1 + k + l + m + *etc. diagonales, in* k (2 + a) *gona*, l (2 + b) *gona*, m (2 + c) *gona etc. possit diuidi.*

In soluendo hoc problemate casus successiue, vbi multitudo diagonalium 1, 2, 3 est, considerabimus, hocque modo facillime formulam generalem poterimus inuenire.

Eadem via ingrediendum esset, si non solum, vt hic, *numeri discerptionum*, sed

discerptionum modi ipsi essent exhibendi. Hanc rem vberius exponere, hic foret nimis prolixum.

§. III.

Theoremata.

1. *Litteris a et b numeros integros positiuos diuersos designantibus;* $(2 + a + b)$ *gonum vna diagonali in* $(2 + a)$ *gonum atque* $(2 + b)$ *gonum discerpi potest* $2 + a + b$ *modis diuersis.*

2. *Littera a numerum integrum positiuum designante;* $(2 + 2a)$ *gonum vna diagonali in duo* $(2 + a)$ *gona discerpi potest* $1 + a$ *modis diuersis.*

Demonstratio est superflua.

Exemplum 1. Pro $a = 1$, $b = 5$ inuenitur ogdogonum vna diagonali in triangulum atque Keptagonum posse discerpi 8 modis diuersis. Si nimirum A B C D E F G H hoc ogdogonum est; discerptio fit, ducenda diagonali 1) vel AC, 2) vel BD, 3) vel CE, 4) vel DF, 5) vel EG, 6) vel FH, 7) vel GA, 8) vel HB.

Exemplum 2. Pro $a = 2$, $b = 4$ inuenitur, ogdogonum vna diagonali in quandrangulum atque hexagonum posſe discerpi 8 modis diversis. Si nimirum ABCDEFGH hoc ogdogonnm est; discerptio fit ducenda diagonafi 1) vel AD, 2) vel BE, 3) vel CF, 4) vel DG, 5) vel EH, 6) vel FA, 7) vel GB, 8) vel HC.

Exemplum 3. Pro $a = 3$ invenitur, ogdogonum vna diagonali in duo pentagona discerpi posse 4 modis diuersis. Si nimirum ABCDEFCH hoc ogdogonum est; discerptio. Si ducenda diagonali 1) vel AE, 2) vel BF, 3) vel CG, 4) vel DH.

§. IV.
Problema.

Litteris a et b numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + a + b$, *vna diagonali in* 1 $(2 + a)$ *gonum et* 1 $(2 + b)$ *gonum possit discerpi.*

Solutio. Numerus quaesitus (§. III. 1.) est N.

§. V.
Problema.

Littera a numerum integrum positiuum designante; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + 2a$, *vna diagonali in* $2\ (2 + a)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Numerus quaesitus (§. III. 2.) est $N : 2$.

§. VI.
Problema.

Litteris a, b et c numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + a + b + c$, *duabus diagonalibus in* $1\ (2 + a)$ *gonum,* $1\ (2 + b)$ *gonum atque* $1\ (2 + c)$ *gonum possit discerpi.*

Solutio. Distinguantur diagonales, in his discerptionibus occurrentes, secundum duo polygona, quibus (§. I. 3.) sunt communes; harumque diagonalium tria sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, quae sunt communes $(2 + a)$ gono atque $(2 + b)$ gono. Quaeuis eiusmodi diagona-

lis si seorsim deletur b); polygonon P vna diagonali apparet discerptum in 1 $(2+a+b)$ gonum atque 1 $(2+c)$ gonum. Si numeri $a+b$ et c diversi sunt; polygonon P, hoc modo discerpi potest (§. IV.) N, si vero $a+b=c$ est, (§. V.) tantummodo N : 2 modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet duorum* in ea occurrentium $(2+a+b)$ gonorum vna diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagonalium primi generis multitudo itaque vtroque casu est N $(2+a+b)$.

Simili modo appellentur

diagonales	quae sunt communes
secundi generis	$(2+a)$ gono et $(2+c)$ gono
tertii generis	$(2+b)$ gono et $(2+c)$ gono

eritque simili ex causa multitudo diagonalium

secundi generis N $(2+a+c)$

tertii generis N $(2+b+c)$

b) Hoc est sic, vt in vna eademque discerptione semper vna tantummodo diagonalis, omnibus reliquis seruatis, sit delenda.

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(6+2a+2b+2c) = 2N(N+1)$. Cum autem quaelibet harum discerptionum duas contineat diagonales; numerus harum discerptionum quaesitus erit $N(N+1)$.

§. VII.
Problema.

Litteris a et b numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + a + 2b$, *duabus diagonalibus in* $1(2+a)$ *gonum atque* $2(2+b)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Diagonalium in his discerptionibus duo sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, quae sunt communes $(2+a)$ gono atque $(2+b)$ gono. Quaeuis eius modi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P vna diagonali apparet discerptum in $1(2+a+b)$ gonum atque $1(2+b)$ gonum. Polygonon P autem hoc modo discerpi potest (§. IV.) N modis diuersis. In quauis eius modi discerptione $(2+a+b)$ gonum in ea occur-

rens una diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagonalium primi generis multitudo itaque est $N(2+a+b.)$

Diagonales *secundi generis* appellentur, quae sunt communes duobus $(2+b)$ gonis. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P vna diagonali apparet discerptum in 1 $(2+2b)$ gonum et 1 $(2+a)$ gonum. Si numeri $2b$ et a diuersi sunt; polygonon P hoc modo discerpi potest (§ IV.) N, si vero $2b=a$ est (§. V.) tantummodo N : 2 modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriore *quodlibet duorum* in ea occurrentium $(2+2b)$ gonorum vna diagonali in duo $(2+b)$ gona (§ III. 2.) discerpi potest $1+b$ modis diuersis. Diagonalium secundi generis multitudo itaque vtroque casu est $N(1+b)$.

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(3+a+2b)=N(N+1)$, ergo numerus harum discerptionum $N(N+1):2$.

§. VIII.

Problema.

Littera a numerum integrum positiuum designante; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + 3a$, *duabus diagonalibus in* $3(2 + a)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Quaecunque diagonalis in his discerptionibus communis est duobus $(2+a)$ gonis. Quaelibet istarum diagonalium si itaque seorsim deletur; polygonon P vna diagonali apparet discerptum in $1(2 + 2a)$ gonum. Polygonon P autem hoc modo discerpi potest (§. IV.) N modis diuersis. In quavis eiusmodi discerptione $(2+2a)$ gonum in ea occurrens vna diagonali in duo $(2 + a)$ gona, (§. III. 2.) discerpi potest $1 + a$ modis diuersis. Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus itaque est $N(1 + a) = N(N + 1) : 3$, ergo numerus harum discerptionum $N(N + 1) : 6$.

§. IX.
Problema.

Litteris a, b, c et d numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + a + b + c + d$, *tribus diagonalibus in* $1(2 + a)$ *gonum,* $1(2 + b)$ *gonum,* $1(2 + c)$ *gonum atque* $1(2 + d)$ *gonum possit discerpi.*

Solutio. Diagonalium in his discerptionibus sex sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, quae sunt communes $(2 + a)$ gono atque $(2 + b)$ gono. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1(2 + a + b)$ gonum, $1(2 + c)$ gonum atque $1(2 + d)$ gonum. Si numerus $a + b$ neque numero c neque numero d aequalis est; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VI.) $N(N + 1)$, si vero numerus $a + b$ numerorum c et d uni aequalis est, (§. VII.) tantummodo $N(N + 1.) : 2$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet duorum* in ea occuren-

tium $(2+a+b)$ gonorum vna diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§.III.1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagonalium primi generis multitudo itaque vtroque casu est $N(N+1)(2+a+b)$.

Simili modo appellentur

diagonales	quae sunt communes,
secundi generis	$(2+a)$ gono et $(2+c)$ gono
tertii generis	$(2+a)$ gono et $(2+d)$ gono
quarti generis	$(2+b)$ gono et $(2+c)$ gono
quinti generis	$(2+b)$ gono et $(2+d)$ gono
sexti generis	$(2+c)$ gono et $(2+d)$ gono

exitque simili ex causa multitudo diagonalium

secundi generis	$N(N+1)(2+a+c)$
tertii generis	$N(N+1)(2+a+d)$
quarti generis	$N(N+1)(2+b+c)$
quinti generis	$N(N+1)(2+b+d)$
sexti generis	$N(N+1)(2+c+d)$

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(N+1)(12+3a+3b+3c+3d) = 3N(N+1)(N+2)$ ergo numerus harum discerptionum $N(N+1)(N+2)$.

§. X.

Problema.

Litteris a, b et c numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + a + b + 2c$, *tribus diagonalibus in* 1 $(2 + a)$ *gonum*, 1 $(2 + b)$ *gonum atque* 2 $(2 + c)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Diagonalium in his discerptionibus quatuor sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, que sunt communes $(2 + a)$ gono atque $(2 + b)$ gono. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in 1 $(2 + a + b)$ gonum atque 2 $(2 + c)$ gona. Si numeri $a + b$ atque c diuersi sunt; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VII.) $N(N + 1) : 2$, si vero $a + b = c$ est, (§. VIII.) tantummodo $N(N + 1) : 6$ modis diuersis: In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet trium* in ea occurrentium $(2 + a + b)$ gonorum vna diagonali in $(2 + a)$ gonum atque $(2 + b)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2 + a + b$

modis diuersis. Diagonalium primi generis multitudo itaque vtroque casu est $N (N+1) (2+a+b) : 2$.

Diagonales *secundi generis* appellentur, quae sunt communes $(2+a)$ gono atque $(2+c)$ gono. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1 (2+a+c)$ gonum, $1 (2+b)$ gonum, atque $1 (2+c)$ gonum. Si numeri $a+c$ atque b diuersi sunt; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VI.) $N (N+1)$, si vero $a+c=b$ est, (§. VII.) tantummodo $N (N+1) : 2$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet duorum* in ea occurrentium $(2+a+c)$ gonorum vna diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+c)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2+a+c$ modis diuersis. Diagonalium secundi generis multitudo itaque vtroque casu est $N (N+1) (2+a+b)$.

Diagonales *tertii generis* appellentur, quae sunt communes $(2+b)$ gono atque $(2+c)$ gono. Earum multitudo simili ex causa est $N (N+1) (2+b+c)$.

Diago-

Diagonales *quarti generis* appellentur, quae sunt communes duobus $(2+c)$ gonis. Quaevis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1\ (2+2c)$ gonum, $1\ (2+a)$ gonum atque $1\ (2+b)$ gonum. Si numerus $2c$ neque numero a neque numero b aequalis est; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VI) $N(N+1)$, si vero $2c$ numerorum a et b vni aequalis est, (§.VII.) tantummodo $N(N+1):2$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet duorum* in ea occurrentium $(2+2c)$ gonorum vna diagonali in duo $(2+c)$ gona (§. III. 2.) discerpi potest $1+c$ modis diuersis. Diagonalium quarti generis multitudo itaque vtroque casu est $N(N+1)(1+c)$.

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(N+1)(12+3a+3b+6c):2=3N(N+1)(N+2):2$, ergo numerus harum discerptionum $N(N+1)(N+2):2$.

§. XI.
Problema.

Litteris a et b numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + 2a + 2b$, *tribus diagonalibus in* $2\ (2 + a)$*gona atque* $2\ (2 + b)$*gona possit discerpi.*

Solutio. Diagonalium in his discerptionibus tria sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, quae sunt communes duobus $(2 + a)$ gonis. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1\ (2 + 2a)$ gonum atque $2\ (2 + b)$ gona. Si numeri $2a$ atque b diuersi sunt; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VII.) $N\ (N + 1) : 2$, si vero $2a = b$ est, (§. VIII.) tantummodo $N\ (N + 1) : 6$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet trium* in ea occurrentium $(2 + 2a)$ gonorum vna diagonali in duo $(2 + a)$ gona (§. III. 2.) discerpi potest $1 + a$ mo-

dis diuersis. Diagonalium primi generis multitudo itaque vtroque casu est $N(N+1)(1+a):2$.

Diagonales *secundi generis* appellentur, quae sunt communes $(2+a)$ gono atque $(2+b)$ gono. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1(2+a+b)$ gonum $1(2+a)$ gonum atque $1(2+b)$ gonum. Polygonon P autem hoc modo discerpi potest (§. VI.) $N(N+1)$ modis diuersis. In quauis eiusmodi discerptione $(2+a+b)$ gonum in ea occurrens una diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagonalium secundi generis multitudo itaque est $N(N+1)(2+a+b)$.

Diagonales *tertii generis* appellentur, quae sunt communes duobus $(2+b)$ gonis. Earum multitudo simili ex causa ac in diagonalibus primi generis est $N(N+1)(1+b):2$.

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $3N(N+1)(2+a+b):2 = 3N(N+1)$

$(N+2):4$, ergo numerus harum discerptionum $N(N+1)(N+2):4$.

§. XII.

Problema.

Litteris a et b numeros integros positiuos diuersos designantibus; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N=2+a+3b$, *tribus diagonalibus in* $1(2+a)$ *gonum atque* $3(2+b)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Diagonalium in his discerptionibus duo sunt genera.

Diagonales *primi generis* appellentur, quae sunt communes $(2+a)$ *gono* atque $(2+b)$ *gono*. Quaevis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1(2+a+b)$ gonum atque $2(2+b)$ gona. Polygonon P autem hoc modo discerpi potest (§. VII.) $N(N+1):2$ modis diuersis. In quauis eiusmodi discerptione $(2+a+b)$ gonum in ea occurrens vna diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§. III. 1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagona-

lium primi generis multitudo itaque est $N(N+1)(2+a+b):2$.

Diagonales *secundi generis* appellentur, quae sunt communes duobus $(2+b)$ gonis. Quaeuis eiusmodi diagonalis si seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1(2+2b)$ gonum $1(2+a)$ gonum atque $1(2+b)$ gonum. Si numeri $2b$ atque a diuersi sunt; polygonon P hoc modo discerpi potest (§. VI.) $N(N+1)$, si vero $2b=a$ est, (§. VII.) tantummodo $N(N+1):2$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet duorum* in ea occurrentium $(2+2b)$ gonorum vna diagonali in duo $(2+b)$ gona (§. III. 2.) discerpi potest $1+b$ modis diuersis. Diagonalium secundi generis multitudo itaque vtroque casu est $N(N+1)(1+b)$.

Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(N+1)(4+a+3b):2 = N(N+1)(N+2):2$, ergo numerus harum discerptionum $N(N+1)(N+2):6$.

§. XIII.

Problema.

Littera a numerum integrum positiuum designante; inuenire, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + 4a$ *tribus diagonalibus in* $4(2 + a)$ *gona possit discerpi.*

Solutio. Quaecunque diagonalium in his discerptionibus communis est duobus $(2+a)$ gonis. Quaelibet istarum diagonalium si itaque seorsim deletur; polygonon P duabus diagonalibus apparet discerptum in $1(2 + 2a)$ gonum et $2(2+a)$ gona. Polygonon P autem hoc modo discerpi potest (§. VII.) $N(N+1):2$ modis diuersis. In quauis eiusmodi discerptione $(2+2a)$ gonum in ea occurrens vna diagonali in duo $(2+a)$ gona (§. III. 2.) discerpi potest $1+a$ modis diuersis. Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus est itaque $N(N+1)(1+a):2 = N(N+1)(N+2):8$, ergo numerus harum discerptionum $N(N+1)(N+2):24$.

§. XIV.

Theorema generale.

Litteris k, l, m *etc. numeros integros non negatiuos, litteris a, b; c etc. autem numeros integros positiuos* d i u e r s o s *designantibus; polygonon P, multitudine laterum* $N = 2 + ka + lb + mc +$ &c., *diagonalibus, multitudine* $D = -1 + k + l + m +$ *etc., in* $k(2+a)$ *gona,* $l(2+b)$ *gona,* $m(2+c)$ *gona etc. discerni potest* $N^{D|1} : k'l'm' \ldots$ *modis diuersis.* c)

D e m o n s t r a t i o.

1. Litteris k, l, m etc. solummodo numeros integros positiuos designantibus, hoc theo-

---

c) Signo $a^{m|r}$ indicatur productum $a(a+r)(a+2r)\ldots(a+(m-1)r)$ cuius factores in arithmetica sunt progressione, et quod *facultas numerica* dicitur. Conferatur *K r a m p i i Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Chap. III.* Est itaque $a^{0|r} = 1$, $a^{1|r} = a$, $a^{2|r} = a(a+r)$, $a^{3|r} = a(a+r)(a+2r)$ etc. hancque seriem retro continuando obtinetur $a^{-1|r} = 1 : (a-r)$, $a^{-2|r} = 1 : (a-r)(a-2r)$, $a^{-3|r} = 1 : (a-r)(a-2r)(a-3r)$ etc.

rema semper verum esse, si $D=1$; apparet e problematibus, §. IV et V propositis, quoniam numerus 2 praeter duas discerptiones $1+1$ atque 2, alias non admittit. Priori restrictione seruata, hoc theorema semper verum esse, si $D=2$; apparet e problematibus, §. VI, VII et VIII propositis, quoniam numerus 3, praeter tres discerptiones $1+1+1$, $1+2$ atque 3, alias non admittit. Eadem restrictione seruata, hoc theorema semper verum esse, si $D=3$; apparet e problematibus §. IX, X, XI, XII et XIII propositis, quo-

---

Signo m' autem indicatur productum $1.2.3\ldots m$, seu $1^{m|1}$, seu $m^{m|-1}$. Est itaque $0'=1$, $1'=1$, $2'=2$, $3'=6$, $4'=24$, $5'=120$ et sic porro.

Si itaque m numerus integer non negatiuus est; erit $a^{m|r}(a+mr)=a^{m+1|r}$, atque pro $a=r=1$, $m'(1+m)=(1+m)'$, $m'(1+m)(2+m)=(1+m)'(2+m)=(2+m)'$.

niam numerus 4, praeter quinque discerptiones $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, $1+3$ atque 4, alias non admittit.

2. Si hoc theorema semper verum est, si litterae k, l, m etc. numeros designant integros *positiuos*, atque D determinatus est numerus; etiam semper verum erit, si k, l, m etc. numeros designant integros *non negatiuos*, atque D idem numerus est.

3. Ex (1.) et (2.) itaque apparet, hoc theorema semper verum esse, si D vel 1, vel 2, vel 3 est.

4. Ponatur iam demonstratam esse, huius theorematis veritatem, si $D = M - 1$ est, ubi M numerus integer positiuus est. Inde sequi huius theorematis veritatem, pro $D = M$, hoc modo ostenditur.

A) Sint k, l, m etc. numeri integri non negatiui, *a*, *b*, *c* etc. autem numeri integri positiui diuersi, atque $-1+k+l+m+$ etc. $= M$. Inquiratur iam, quot variis modis polygonon P, multitudine laterum $N = 2 + ka + lb + mc +$ etc., diagonalibus, multitudine $D = -1 + k + l + m +$ etc. $= M$, in

k $(2+a)$ gona, l $(2+b)$ gona, m $(2+c)$ gona etc. possit discerpi.

B) Si $k > 1$ est, atque quaecunque diagonalis in his discerptionibus, quae communis est duobus $(2+a)$ gonis scorsim deletur; polygonon P D-1 diagonalibus apparet discerptum in $1\,(2+2a)$ gonum, $k-2$ $(2+a)$ gona, l $(2+b)$ gona, m $(2+c)$ gona etc. Si numerus $2a$ nulli numerorum b, c, d etc. aequalis est; polygonon P hoc modo discerpi potest ex suppositione $N^{D-1|1} : (k-2)'\, l'\, m' \ldots$, si vero $2a$ numerorum b, c, d etc. vni aequalis, e. g. si $2a = b$ est, ex suppositione tantummodo $N^{D-1|1} : (k-2)'(l+1)'m' \ldots$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet* $l+1$ in ea occurrentium $(2+2a)$ gonorum vna diagonali in duo $(2+a)$ gona (§. III. 2.) discerpi potest $1+a$ modis diuersis. Diagonalium, quae sunt communes duobus $(2+a)$ gonis, in omnibus quaesitis discerptionibus multitudo itaque vtroque casu est $N^{D-1|1}(1+a) : (k-2)'\, l'\, m' \ldots$ vel, quod idem est

$$N^{D-1|1}(k-1)\,(k+ka) : k'\, l'\, m' \ldots$$

Haec expressio etiam tunc vera est, si $k = 1$, vel $k = 0$ est. Tunc enim nullae sunt eiusmodi diagonales, atque expressio modo inuenta hoc casu etiam abit in nihilum.

C) Si $k > 0$, $l > 0$ est, atque quaecunque diagonalium in his discerptionibus, quae communis est $(2+a)$ gono atque $(2+b)$ gono seorsim deletur; polygonon P D-1 diagonalibus apparet discerptum in 1 $(2+a+b)$ gonum, $k-1$ $(2+a)$ gona, $l-1$ $(2+b)$ gona, m $(2+c)$ gona, n $(2+d)$ gona etc. Si numerus $a+b$ nulli numerorum c, d etc. aequalis est; polygonon P hoc modo discerpi potest ex suppositione ND-1I1 : $(k-1)'(l-1)'$ $m'n'\ldots$, si vero $a+b$ numerorum c, d etc. vni aequalis, e. g. si $a+b = c$ est, ex suppositione tantummodo ND-1I1 : $(k-1)'(l-1)'$ $(m+1)'n'\ldots$ modis diuersis. In qualibet eiusmodi discerptione priori casu *vnicum*, posteriori *quodlibet* $m+1$ in ea occurrentium $(2+a+b)$ gonorum vna diagonali in $(2+a)$ gonum atque $(2+b)$ gonum (§.III. 1.) discerpi potest $2+a+b$ modis diuersis. Diagonalium, quae sunt communes $(2+a)$ gono atque $(2+b)$ gono in omnibus quaesi-

tis discerptionibus multitudo itaque vtroque casu est $N^{D-1}\Pi\,(2+a+b) : (k-1)'(l-1)'m'n'\ldots$, vel, quod idem est

$$N^{D-1}\Pi\ kl\,(2+a+b) : k'\,l'\,m'\ldots$$

Haec expressio etiam tunc vera est, si vel $k=0$, vel $l=0$, vel $k=l=0$ est. Tunc enim nullae sunt eiusmodi diagonales, atque expressio modo inuenta hoc casu etiam abit in nihilum.

D) Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus itaque aequalis est producto quotientis $N^{D-1}\Pi : k'l'm'\ldots$ in quantitatem

$$(k-1)(k+ka)+(l-1)(l+lb)+(m-1)(m+mc)+\ldots$$
$$+kl(2+a+b)+km(2+a+c)+lm(2+b+c)+\ldots$$

Haec vero quantitas est etiam d)

$$(-1+k+l+m+\text{etc.})(k+ka+l+lb+m+mc+\text{etc.})$$

vel, quod idem est $D\,(N+D-1)$. Summa omnium diagonalium in omnibus quaesitis discerptionibus itaque est $D\,N^{D}\Pi : k'l'm'\ldots$ ergo numerus harum discerptionum $N^{D}\Pi : k'l'm'\ldots$ Q. E. D.

---

d) Facile hoc perspicitur, si quaeuis expressio huius formae $kl\,(2+a+b)$ in hanc $l\,(k+ka)+k\,(l+lb)$ mutatur.

Coroll. 1) Datis numeris k, l, m etc. numerus D etiam datus est. Si itaque praeterea datus est numerus N; numerus discerptionum quaesitus a numeris *a*, *b*, *c* etc. independenter est determinatus.

Coroll. 2) Si inueniendum esset, quomodo polygonon P, multitudine laterum N, per D diagonales in D+1 (§. I. 5.) polygona possit discerpi; construenda est (D+1)ta classis combinationum ad summam N+2D ex elementis 3, 4, 5 etc. Innotescunt hoc modo discerptionis diuersa *genera*. Quodcunque genus quot contineat *species*, docet theorema generale propositum.

Exemplum. Quomodo dodecagonum duabus diagonalibus potest discerpi in tria polygona? Hic est N=12, D=2, ergo construenda tertia combinationum classis ad summam 16 ex elementis 3, 4, 5 etc. quae est

1)	3,	3,	10
2)	3,	4,	9
3)	3,	5,	8
4)	3,	6,	7
5)	4,	4,	8
6)	4,	5,	7
7)	4,	6,	6
8)	5,	5,	6

Discerptio itaque fieri potest 1) in duo triangula atque decagonum 78 modis; 2) in triangulum, quadrangulum et enneagonum 156 modis; 3) in triangulum, pentagonum et ogdogonum 156 modis; 4) in triangulum, hexagonum et heptagonum 156 modis; 5) in duo quadrangula et ogdogonum 78 modis; 6) in quadrangulum, pentagonum et heptagonum 156 modis; 7) in quadrangulum atque duo hexagona 78 modis; 8) in duo pentagona atque hexagonum 78 modis. Summa omnium modorum vel specierum est itaque 936.

Coroll. 3) Haec summa omnium specierum generaliter est $N^{D|1} (N-3)^{D|-1} : D'(D+1)'$. In exemplo corollarii 2), ubi $N = 12$, $D = 2$, haec summa est $12 . 13 . 9 . 8 : 2 . 6 = 936$ vt antea.

Coroll. 4) Si hic $D > N-3$ accipitur; haec summa euanescit (§. I. 6.)

Coroll. 5) Theorema propositum etiam pro $D = 0$ verum est. Ponendo enim $k = 1$, $l = m = n$ etc. $= 0$; inuenitur: *Quodcunque* $(2+a)$ *gonum nulla diagonali, in* 1 $(2+a)$ *gonum discerpi potest modo vnico.* Haec

enunciatio manifesto vera est. Ad eam etiam peruenimus, ponendo in formula corollarii 3) $D = o$.

Coroll. 6) Si vero acciperetur $o = k = l = m$ etc. esset $D = -1$, $N = 2$, atque obtineretur enunciatio: *Biangulum per* -1 *diagonales in nulla polygona discerpi potest modo unico.* Hoc paradoxon ex analogia nihilominus verum est censendum.

Scholion. Summa similitudo quae intercedit formulae generali, initio huius §phi propositae, formulaeque generali, plurium elementorum *numerum permutationum* exhibenti, a quolibet, artis combinatoriae haud ignaro, statim obseruabitur.

§. XV.

Quaedam ad problematis historiam.

Problema maxime curiosum (§. II.) a paucis tantummodo, atque ea, qua hic, generalitate nondum (quod equidem scio) est tractatum. Casus speciales contemplati sunt *Viri Celeberrimi Segnerus* atque *Nicolaus Fuss.*

Segnerus (Nov. Comm. Ac. Petrop. Tom. VII. pro annis 1758 et 1759 pag. 203.)

de resolutione polygonorum in sola triangula agit. Numeros, qui indicant, quot variis modis biangulum, triangulum, quadrangulum, pentagonum etc. in triangula possit resolui, litteris denotat a, b, c, d etc. atque via, sine dubio ingeniosa, inuenit $a = 1$, $b = a^2$, $c = 2ab$, $d = 2ac + b^2$, $e = 2ad + 2bc$, $f = 2ac + 2bd + c^2$ etc. ergo numerorum quaesitorum quemuis per omnes antecedentes. Lex progressus horum numerorum a *Segnero* non proposita, a Celeberrimo auctore summarii huius tomi commentariorum autem ex inductione tantum petita est. Summo rigore hoc modo possit demonstrari. Ex aequationibus recurrentibus modo propositis statim sequitur, esse

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.})^2 = b + cx + dx^2 + \text{etc.}$$

Si itaque ponitur

$$Q = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$$

habemus

$$Q^2 = (Q - 1) : x$$

unde prodit

$$Q = (1 - \sqrt{1 - 4x}) : 2x$$

vel, si $\sqrt{1 - 4x}$ secundum theorema binomiale in seriem infinitam mutatur

$Q = 1$

$$Q = 1 + \frac{2}{2}x + \frac{2.6}{2.3}x^2 + \frac{2.6.10}{2.3.4}x^3 + \text{etc.}$$

Est itaque $a = 1$, $b = \frac{2}{2}$, $c = \frac{2.6}{2.3}$, $d = \frac{2.6.10}{2.3.4}$ etc. Polygonon $2 + k$ laterum itaque in k triangula $k - 1$ diagonalibus resolui potest $2^{k|4} : 2^{k|1}$ modis diuersis. Formula nostra generalis (§. XIV.) dat $(2 + k)^{k-1|1} : k'$ quod idem est, quoniam $(2 + k)^{k-1|1} : k' = (1 + k)^{k|1} : (1 + k)'$, atque $2^{k|4} = (1 + k)^{k|1}$, $2^{k|1} = (1 + k)'$.

Nicolaus Fuss, occasione a *Celeberrimo F. Pfaffio* data, in tomo comm. Ac. Petrop. qui ad manus non est, problema paulo generalius tractauit, de resolutione polygonorum in sola $(2 + a)$ gona agens. Numeros, qui indicant, quot variis modis polygonon $2 + a$, $2 + 2a$, $2 + 3a$, $2 + 4a$ etc. laterum in sola $(2 + a)$ gona possit resolui, litteris denotat A, B, C, D etc. atque, diuersis diagonalium generibus e) contemplandis, inuenit

---

e) Haec genera ab iis diuersa sunt, quae hic distincta sunt in §phis IV - XIV.

$$A = 1$$
$$2B = (2+2a)A^2$$
$$4C = (2+3a)2AB \qquad (☽)$$
$$6D = (2+4a)(2AC+B^2)$$
$$8E = (2+5a)(2AD+2BC)$$
$$10F = (2+6a)(2AE+2BD+C^2)$$

et sic porro. Ex istis formulis etiam hanc

$$(1+Ax+Bx^2+\text{etc.})^{a+1} = A+Bx+Cx^2+\text{etc.} \qquad (♂)$$

deriuat, ad quam etiam possemus peruenire via *Segneri*. Formulis (☽) numerorum quaesitorum quilibet omnibus antecedentibus determinatur. Determinationem cuiuslibet horum numerorum extra ordinem, et a praecedentibus independenter, *Nic. Fuss* non tentauit. Quod si fecisset, atque valores antecedentium in sequentibus substituisset; legem progressus ex inductione saltem inuenisset. Multo facilius autem hoc sic fieri potest. Ponatur $1+Ax+Bx^2+\text{etc.} = Q$, atque habemus ex aequatione (♂) $Q^{a+1} = (Q-1):x$ vel $Q-1 = xQ^{a+1}$. Inuertenda hac aequatione secundum formulam *Eschenbachianam*, summo rigore a me demonstratam (*Formulae de*

sericrum reuersione demonstratio vniuersalis. Lips. 1793.) ex hac aequatione inuenitur

$$Q = \frac{1^{0|1}}{1.0'} + \frac{(1+a)^{1|1}}{(1+a)\,1'}\,x + \frac{(1+2a)^{2|1}}{(1+2a)\,2'}\,x^2 + \text{etc.}$$

unde prodit, polygonon $2+ka$ laterum in sola $(2+a)$ gona resolui posse $(1+ka)^{k|1} : (1+ka)\,k' = (2+ka)^{k-1|1} : k'$ modis diuersis, quod nostra formula generali etiam euincitur.

Omnibus eiusmodi artificiis a re ipsa longe alienis interea supersedere possumus, si, vt hic, problema statim ab initio summa generalitate tractatur. Hacce enim via formula generalissima via inuenitur facillima, cum e contrario casuum solummodo specialiorum tractatione ipsorum eiusmodi casuum formulae generales vel solummodo ex inductione, vel adhibendis eiusmodi artificiis haud vulgaribus possint inueniri.

§. XVI.

Quae in §. XV. dicta sunt, possent etiam ad casum maxime generalem extendi. Si enim ex aequatione

$$(☿)\ Q - 1 = xQ^{a+1} + yQ^{b+1} + zQ^{c+1} + \text{etc.}$$

quantitas Q per seriem infinitam ordinis altioris f), quae in variis eius dimensionibus secundum litterarum x, y, z etc. dignitates progreditur, exhibetur; via *Segneri* inuenitur, coefficientem huius seriei, qui afficit productum $x^k\, y^l\, z^m \ldots$ numerum esse, qui indicat, quot variis modis $(2 + ka + lb + mc + \text{etc.})$ gonum per $-1 + k + l + m + \text{etc.}$ diagonales in $k\,(2 + a)$ gona, $l\,(2 + b)$ gona, $m\,(2 + c)$ gona etc. possit discerpi. Hunc vero numerum valorem habere, theo-

f) De seriebus infinitis ordinis secundi egit *Clariss. D. Martin. Ohm* in dissertatione sua: *De eleuatione serierum infinitarum secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterminati. Erl.* 1811. Quid seriebus infinitis primi, secundi, tertii etc. ordinis intelligendum sit exinde apparet.

remate (§. XIV.) propositum, e problemate reuersorio, summa generalitate tractato g) sequitur. Idem problema docet, seriei, quae exprimit Q^A, coefficientem, qui afficit productum $x^k y^l z^m \ldots$ esse

$$\frac{A(A-1+N)^{D-1}}{k'l'm'\ldots} = \frac{A(A-2+N)^{D+1}}{(A-2+N)\,k'l'm'\ldots}$$

vbi, vt supra $D = -1 + k + l + m +$ etc. atque $N = 2 + ka + lb + mc +$ etc. est.

---

g) Hoc problema maximi momenti nusquam adhuc deprehendi propositum. Vestigia huius disquisitionis inueniuutur quidem in tractationibus *Euleri Illustris* 1) *Analysis facilis et plana, ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaecunque earum potestates exprimi possunt*, atque 2) *De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum etc. (Nov. Act. Acad. Sc. Petrop. Tom. IV. ad annum* 1786.) sed demonstrationes legitimo rigore mihi videntur destitutae.

Ratiociniis *Segneri* adhibendis, inde apparet, si polygonon P, laterum $N = 2 + ka + lb + mc +$ etc. diagonalibus, multitudine $D = -1 + k + l + m +$ etc., in $k\,(2 + a)$ gona, $l\,(2 + b)$ gona, $m\,(2 + c)$ gona etc. ita discerpendum est, vt determinatum polygoni P latus pertineat (§. I. 3.) ad $(2 + a)$ gonum; hoc fieri posse $k\,(1 + a)\,N^{D-1|1} : k'l'm' \ldots$ modis diuersis.

Si, *Nic. Fussii* exemplo, diagonalium genera diuersa contemplamur; possint etiam pro hoc casu maxime generali formulae recurrentes exhiberi, iis similes, quas §. XV. signo (𝔇) denotauimus. Has vero formulas afferre nimis prolixum esset, atque simul inutile.

Norimbergae
litteris G. P. I. Bieling
1814.

Corrigenda.

pag. 3. *nota* a) *lin.* 2, *l.* eiusmodi — *pag.* 6. *lin.* 18. *l.* heptagonum — *pag.* 7. *lin.* 2. *l.* qua- — *ib.* *lin.* 6. *l.* diagonali — *ib.* *lin* 12. *l.* ABCDEF GH — *ib.* *lin.* 13. *l.* discerptio fit ducenda — *pag.* 10. *lin.* 18. *et* 23. *l.* eiusmodi — *pag.* 11. *lin.* 4. *l.* N $(2+a+b)$. — *pag.* 12. *lin.* 12. *et* 13. *l.* apparet discerptum in $1(2+2a)$ gonum atque $1(2+a)$ gonum). — *pag.* 13. *lin.* *vlt.* *l.* occurren- — *pag.* 14. *lin.* 13. *l.* eritque — *pag.* 15. *lin.* 12. *l.* quae — *pag.* 16. *lin.* 21. *l.* N $(N+1)(2+a+c)$.